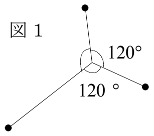
スタイナー問題

正ｎ角形の頂点に点をとるときの解

平面上に定点が何個かあるとき、その定点をすべて結ぶ線分の和が最小になる問題を考える。このような問題を、**スタイナー問題**という。

はじめに、実験を行った。パレット上に、リベットを３，４，５個置き、石鹸膜を作って、その膜がどのようにできるかを観察する。
　まず、上から観察して３つの膜が交わるときは、膜は互いに１２０°の角をなす（図１）。つまり、表面張力が膜に沿って働くとき、安定な状態では表面張力を表す３つの力$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$がつりあっている。３つのベクトルが１２０°の角をなし、その和が$\vec{0}$であるとき、ベクトルの大きさは等しい。

図１

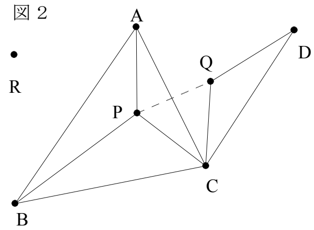


$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0},\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{のなす角}120^\circ \Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$$

つまり、図１のような膜の交点で膜の方向に引っ張る力が等しい。すなわち表面張力は膜の長さに関係なくほぼ等しいことが分かる。（あまり実験の精度は高くないので「ほぼ」）これより表面張力のエネルギーは膜の面積に比例する。また、安定な状態では、エネルギーが最小であるから、膜の面積が極小（最小かどうかはわからない）となる。この状態は上から見たとき、スタイナー問題の解を暗示する。
　つまり、点が何個かあるとすると、その点を結ぶ線分の和が最小となるのは、線分が互いに１２０°の角で交わっているときである。（図１）図１のようなとき、３つの線分の交点をスタイナー点と呼ぶことにする。

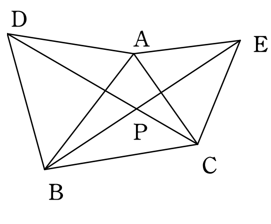
　３点 A,B,C が与えられているとき、スタイナー点の求め方と和が最小となることを証明してみる。
　△ ABC の内角がすべて 120°より小さいとき（図２）、△ APC をＣを中心に図２のように 60°回転したものを△ DQC とする。
このとき、△ PCQ は正三角形となるので AP ＋ BP ＋ CP=折れ線 BPQC
折れ線の長さが最小になるのは折れ線が直線のとき。∴∠ BPC=120°
∠ APB も同様にして 120°である。このときの∠ APB,∠ BPC,∠ CPA をスタイナー角と呼ぶことにする。

図２



次にＰの位置を求める。図３のように△ ABC の右側に正三角形 AEC、左側に正三角形 ABD をつくる。上で示したように点 P は直線 BE 上にあり、直線 CD 上にもあるので、スタイナー点 P は直線 BE と直線 CD の交点である。

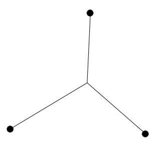
図3



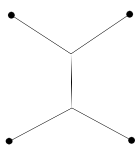
　　三角形の内角が 120°より大きいとき図２のようには書けないので直接３頂点を結ぶ場合が最小。

次に、特別な図形におけるスタイナー問題での線分の和を求める。
以下の図形の頂点に点をとるとき、和を求める。

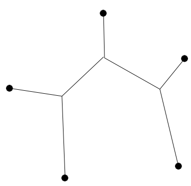
（１）正３角形



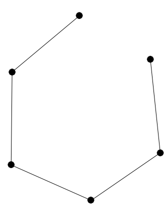
（２）正方形



（３）正５角形



（４）正六角形

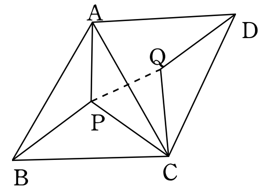


（５）正ｎ角形

ｎ＞６

内角＞ 120 °
だから(4)と
同じ結び方

１ページ下図のように線を結ぶ場合、線分の和が最小となる。線分の和の最小値をＬと表すことにする。線分のなす角はそれぞれスタイナー角の１２０°である。正多角形の１辺 a としてＬを求めてみる。



（１）正三角形

L＝$\sqrt{3}\,a$　　　（直接頂点を結ぶと線分の和は $2a$）

△ APC を C の周りに 60°回転して△ DQC とすると△ ACD は正三角形。
AP ＋ BP ＋ CP ＝折れ線 BPQD
折れ線が直線のとき線分の和が最小なのでＬ＝線分 BD

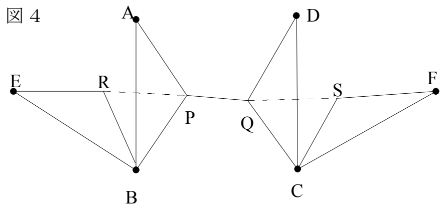
（２）正方形　（図４正方形 ABCD とする）

△ ABP,△ DCQ を 60°左右に回転して△ EBR,△ FCS とする。線分の和Ｌは折れ線 ERPQSF の長さである。和Ｌが最小となるのは折れ線が直線になるときで、そのとき、△ PBR,△ QCS は正三角形だから図４で

∠ APB ＝∠ APQ ＝∠ PQD ＝∠ PQC ＝ 120°

L＝$(1+\sqrt{3})a$　　（直接頂点を結ぶと和は $3a$）

図４



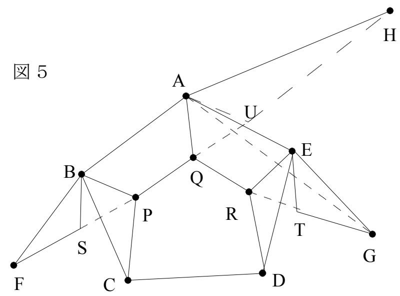
（３）正５角形(図５正５角形 ABCDE とする）

図５のように３このスタイナー点を P,Q,R とする。△ BCP,△ ERD をそれぞれ B,E を中心に 60°回転して△ BSF,△ ETG とする。線分の和が最小のときは F,S,P,Q と Q,R,T,G はそれぞれ一直線上にある。

次に△ AQG を A を中心に 60°回転して△ AUH とする。折れ線 FSPQUH は直線となり、折れ線 FSPQUH の長さは PC+PB+PQ+QA+QR+RE+RD:頂点とスタイナー点を結ぶ線分の和と一致する。
対称性と回転により

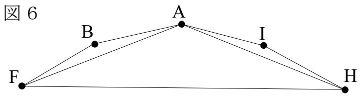
AF=AG=AH

図５



点 E を A の周りに 60°回転した点を I とする。このとき△ AEG を A の周りに 60°して△ AIH とする。対称性から
△ ABF ≡△ AIH だから（図６）
∠ BAI ＝ 108+60 ＝ 168°
a=FB=BA=AI=IH で∠ FBA=108+60 ＝ 168°
だから∠ BFA=∠ BAF=6°
∠ FAH=168 － 12=156°、∠ AFH=12°
AF=b とおけば b=2$a$cos6°よって各頂点を結ぶ線分の和の最小値Ｌは

図６



$L = FH = 2b\cos 12° = 4a\cos 6° \cos 12° ≒ 3.891157a$　　　（直接頂点を結ぶと $4a$）

（４）正６角形のときは内角が 120°でスタイナー角に等しいので直接頂点を結んだ線分が最小の場合

Ｌ＝ $5a$

（５）正ｎ角形（ｎ＞６）のときは内角が１２０°より大きくなるので直接頂点を結ぶとき線分の和は最小

Ｌ＝(n － 1) a