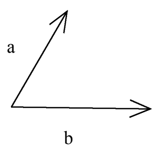
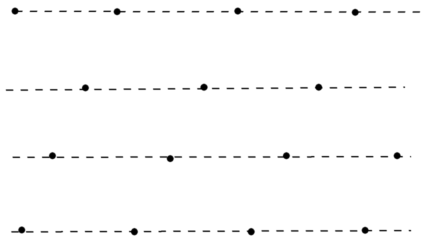
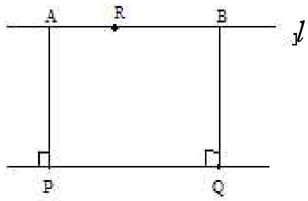
無限個のスタイナー問題その２

等間隔に限りなく多くの平行線を引いたものが２組ある。その交点に点を極めて多くとったとき、それらを結ぶ線分の和を最小にする問題（無限個のスタイナー問題（少し一般化したもの））

前回、正３，４，５，６角形で平面を埋め尽くしてその頂点でのスタイナー問題を考えた。
今回は一般化をすすめ、任意の平行四辺形で平面を埋め尽くして、平行四辺形の頂点に点を取った場合のスタイナー問題を考える。







点を$\vec{p}=l\vec{a}+m\vec{b}$ (l,mは整数) の形で表される位置にとる。それぞれの点をここではスタイナー点と呼ぶことにする。スタイナー点を全て結ぶ線分の和の最小値をスタイナー和と呼ぶことにする。このとき、すべてのスタイナー点は等間隔の平行線上にある。ただし、平行線はいろいろな取り方があるが、どのどの場合もスタイナー点は平行線に等間隔にある。

スタイナー点のうち１つを選びそれを P とする。P に最も近いスタイナー点の１つを Q とする。直線 PQ と直線 l の間にはスタイナー点がなく、直線 l 上には PQ と同じ間隔でスタイナー点が並ぶようにできる。上図で、線分 AB 上に必ずスタイナー点が１個ある。その点を R とする。△ PQR において∠ P ≦ 90°，∠ Q ≦ 90° また、Q が P に最も近いスタイナー点だから PQ が最小辺。∠ PRQ が最小角（残りも 90°以下）なので△ PQR は鋭角または直角三角形。つまり鋭角または、直角三角形を平行移動して全てのスタイナー点を得ることが出来る。

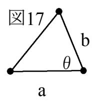
△ PQR の最大角を θ，最大角をはさむ２辺を $a,b\,(a \geqq b)$ 残りの辺を c とすると、$60^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$、
$b = ka\,(0 < k \leqq 1)$ とおける。（図１７では上図の△ PQR とは向きが変わる）

図１７において c は最大辺だから

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \geqq a^2$$

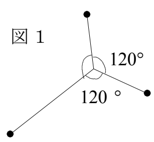
よって

$$k \geqq 2\cos\theta \quad \cdots ①$$

図17


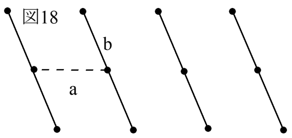
スタイナー点を単位面積あたり１個とり、１点当たりのスタイナー和の取りうる範囲について考えてみる。

図１のような３個のスタイナー点を結ぶスタイナー和を与えるのは線分が 120° の角をなすとき、また、２個のスタイナー点を結ぶスタイナー和を与えるのは
２点を直線で結ぶときであった。

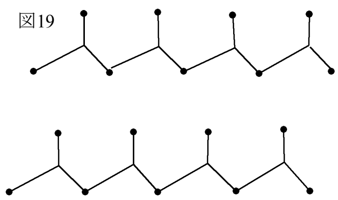
図 1


このとき、スタイナー和を与える可能性のある結び方は次の時
限りなく広がった折れ線（直線）は１カ所だけつなぐことにすると、１点当たりのスタイナー和ではその連結部分の線分の長さは極限では無視できる）

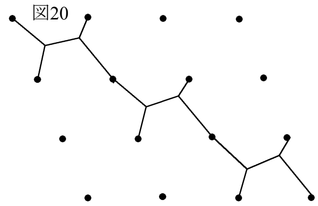
（ⅰ）



（ⅱ）



（ⅲ）



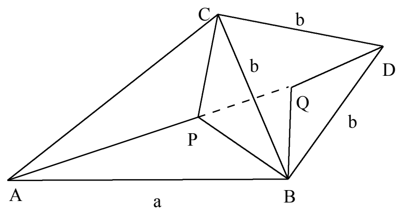
スタイナー点は平行四辺形１つに１点だから $ab\sin\theta = 1$
また、$b = ak$ であるから $ka^2\sin\theta = 1$

よって　$a = \dfrac{1}{\sqrt{k\sin\theta}}$

（ⅰ）～（ⅲ）のスタイナー点１個あたりのスタイナー和を L_1 ～ L_3 とする。

（ⅰ）のとき　$L_1 = b = ak = \sqrt{\dfrac{k}{\sin\theta}}$

（ⅱ）のとき１つの三角形内の線分の長さ l は
l ＝ AD　（△ BPC を 60°回転して△ BQD,このとき APQD は直線）



$$l = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta + 60^\circ)}$$

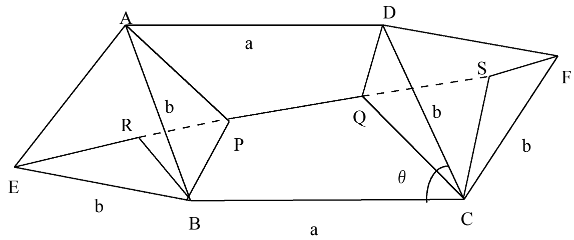
したがって

$$L_2 = \frac{l}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{k^2 - 2k\cos(\theta + 60^\circ) + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2 - 2k\cos(\theta + 60^\circ) + 1}{k\sin\theta}}$$

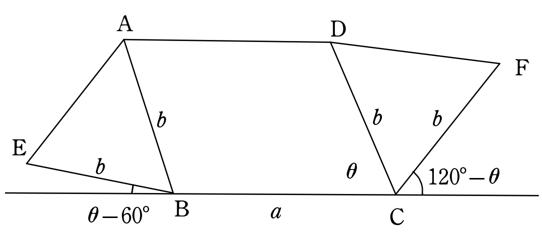
（ⅲ）のとき１つの平行四辺形内の線分の長さの和 l_1 は　l_1 ＝ PA＋PB＋PQ＋QC＋QD
△ ABP を B の周りに 60°回転して△ EBR,△ DQC を C の周りに 60°回転して△ FSC とする。
折れ線 ERPQSF 一直線となるので l_1 ＝ EF

$$l_1^2 = b^2\{\sin(120^\circ - \theta) - \sin(\theta - 60^\circ)\}^2 + \{a + b(\cos(120^\circ - \theta) + \cos(\theta - 60^\circ))\}^2$$
$$= b^2(\sqrt{3}\cos\theta)^2 + (a + b\sqrt{3})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{3}\sin\theta + 3b^2$$

よって



$$l_1 = \sqrt{a^2 + 2ab\sqrt{3}\sin\theta + 3b^2}$$



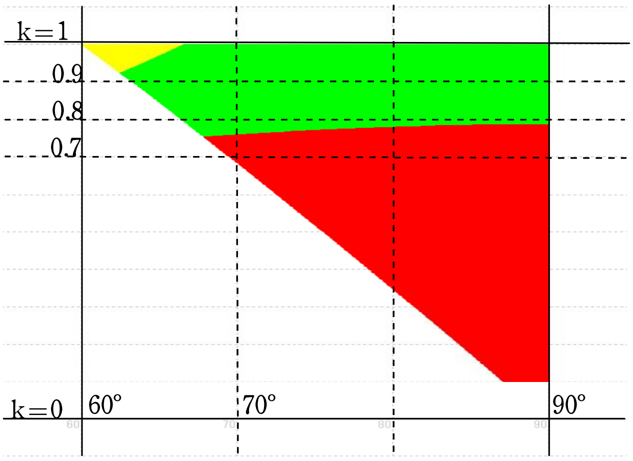
これと向きを変えた線分の長さを l_2 とすると、
$l_1{}^2 - l_2{}^2 = 2(b^2 - a^2) \leqq 0$　よって $l_1 \leqq l_2$
（等号は $a = b$ のとき）
$L_3 = l_1 / 3$
つまり

$$L_3 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3k^2 + 2\sqrt{3}k\sin\theta + 1}{k\sin\theta}}$$

また、１ページ①により

$k \geqq 2\cos\theta$

$0 < k \leqq 1$, $60^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で、それぞれの k, θ での L_1, L_2, L_3 の最小値をＬとし、Ｌの変化を調べる。右図は L_1, L_2, L_3 で最小となるものを表した図である。$0.1 \leqq k \leqq 1$, $60^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ で表している。



左上の領域は L_2 が最小の領域
その下は L_3 が最小の領域
一番下は L_1 が最小の領域

最大値となるのは $\theta \fallingdotseq 66.50222^\circ$ 、$k = 1$ のとき

Ｌの最大値は０．９３２４８７２６・・

L_1（下の領域）は θ を固定すると k について増加関数
k を固定すると θ について減少関数

L_2（左上の領域）はルートの中の式を F とかくと

$$F = \frac{1}{\sin\theta}\left(k + \frac{1}{k}\right) - \frac{2\cos(\theta + 60^\circ)}{\sin\theta}$$

$\sin\theta > 0$ で $k + \frac{1}{k}$ は $k \leqq 1$ で減少関数（下ほど値が大）

また、$F = \frac{k^2 + 1 - k\cos\theta}{k\sin\theta} + \sqrt{3}$ であるから、k を固定して θ を弧度法で表して θ で微分すると

$\frac{dF}{d\theta} = \frac{k - (k^2+1)\cos\theta}{k\sin^2\theta}$ 、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で $\cos\alpha = \frac{k}{k^2+1}$ とすると $\theta \leqq \alpha$ で $\frac{dF}{d\theta} \leqq 0$ で F は減少、$\theta \geqq \alpha$ で増加

$k = 0.9$ で $\alpha \fallingdotseq 60.2^\circ$ 、$k = 1$ で $\alpha = 60^\circ$ だから上の領域図から L_2 は θ の増加関数

L_3 のルートの中を G とかく。

$G = \frac{1}{\sin\theta}\left(3k + \frac{1}{k}\right) + 2\sqrt{3}$ だから θ を固定すると $k \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ で k の G は増加関数

また、k を固定すると θ の減少関数。領域図から

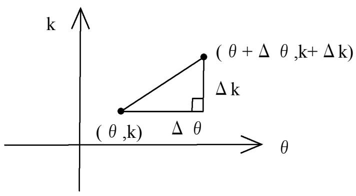
L_3 は k の増加関数、θ の減少関数

以上のことから L は L_2,L_3 がそれぞれ最小となる領域の境界部分で最小

さて、$\Delta G = G(\theta + \Delta\theta, k + \Delta k) - G(\theta, k)$

を考えると、

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial\theta}\cdot\Delta\theta + \frac{\partial G}{\partial k}\cdot\Delta k$$



$$= \Delta\theta\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial\theta} + \frac{\partial G}{\partial k}\frac{\Delta k}{\Delta\theta}\right)$$

$$= \frac{-\Delta\theta}{\sin\theta}\left\{\frac{1}{\tan\theta}\left(3k + \frac{1}{k}\right) + \left(-3 + \frac{1}{k^2}\right)\frac{\Delta k}{\Delta\theta}\right\}$$

L_2,L_3の境界線付近では$\dfrac{\Delta k}{\Delta\ \theta}$の値は0.9～1.3、$\dfrac{1}{tan\,\theta}$の値は0.44～0.57

kは0.87～1.0

ｋ＝１の近くではθ≒66°で{}の中は負でΔＧは増加

θ＝60°の近くではｋ≒0.87で｛｝の中は正でΔＧは減少

L2,L3の境界線上の右上端でＧは最大で、そのときｋ＝１，θ≒６６．５０２２２°

Ｌ≒０．９３２４８７２６

結論　平面上に等間隔に限りなく引いた平行線を２組作り、交点に点を取る。但し、１点当たりの面積を１とする。全ての点を結ぶ線分の１点当たりの長さは0.93248・・以下にできる。

以下は予想である。

予想

どんな点の取り方をしても１点当たりの面積が１のときは１点当たりの線分の長さは 0.93248・・より大きくない。

○ｎが十分大きいとする。領域Ｄの面積がｎでＤの中にｎ個の点をとるとき、ｎ個の点を結ぶ線分の長さの総和はｎより小さくできる。

もう少し一般化して、領域Ｄの面積がＳでその中にｎ個点をとるとき、１個あたりのの面積は$\dfrac{S}{n}$だから全体を$\sqrt{\dfrac{n}{S}}$倍すると１個あたりの面積は１。長さの総和はｎより小さい。元の大きさに戻すため、$\sqrt{\dfrac{S}{n}}$倍する。

長さの総和は$n\sqrt{\dfrac{S}{n}}=\sqrt{nS}$より小さい。すなわち、

○ｎが十分大きいとする。領域Ｄの面積がＳでＤの内部にｎ個の点をとるとき、ｎ個の点を結ぶ線分の総和は$\sqrt{nS}$より小さい。

例　３７万ｋｍ２の領域に５千万個の点をとるとき、これらをすべて結ぶ線分の長さの総和はいくらより小さくできるか

$$L=\sqrt{37\times10^4\times5\times10^7}\fallingdotseq3.7\times10^6km$$　より小さい