スタイナー問題無限個の点（無限個の点のスタイナー問題）
平面上に限りなく多くの点をとった場合のスタイナー問題１

平面上に無限個とるとは、Ｎを十分大きい自然数として、その場合のスタイナー問題を考え、そののち、Ｎ→∞とする。

まず、規則正しい配置でないと手がかりがないので、正ｎ角形を平行移動によって平面を覆うことが出来る場合を考える。ｎ＝３，４，６のとき正ｎ角形で平面を覆うことができる。

【１】ｎ＝４　【２】ｎ＝３　【３】ｎ＝６　の順で点の結び方を考える。

単位面積に１点ずつとり１点当たりの線分の長さを最小にする場合とその最小値を考える。なお、最小であることの完全な証明は困難であることをあらかじめ断っておく。ここでは完全な証明できない。解の予想といっておく。

以後の記述で、ある”点の配置”において、すべての点を結ぶ結び方を与え、そのときの点１個あたりの線分の長さをＬとする。Ｌを最小にする問題がスタイナー問題であるが、結び方のパターンを変えると各パターンによってＬの最小値が異なるが、最小となり得るいくつかのパターンでＬの最小値を求め、それがもっとも小さくなる場合が解である。

【１】ｎ＝４のとき

正方形の頂点に点をとる。つまり、ｘｙ平面ですべての格子点に点を取ればよい。

図８で限りなく続く斜めの帯で、１カ所だけ繋げておけばすべての点が結べる。右図のパターンが最も短いようである。正方形９個を１つの単位（セルと呼ぶことにする）とすると後の計算がしやすい。

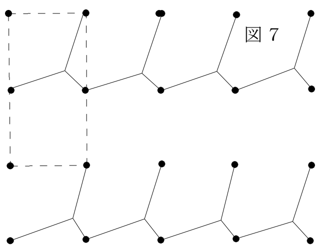
図７もなす角１２０°となり１つの候補であるが、こちらの方が長い。

正方形の１辺を１とすると１点当たりの面積は１である。

１点あたりの線分の長さをＬとすると

はじめに

図７のパターンの結び方で規則正しく結ぶ。



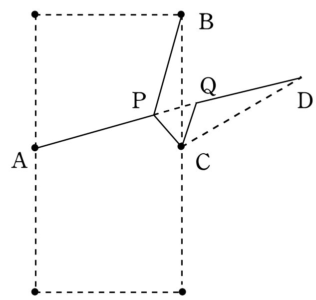


図７の右の拡大図で△ BPC を点 C の周りに 60 °回転して△ DQC とする。折線 APQD が直線となるとき折れ線の長さが最小となる。

このとき、点線の内側の線分の和は

$$AP + BP + CP = AD$$

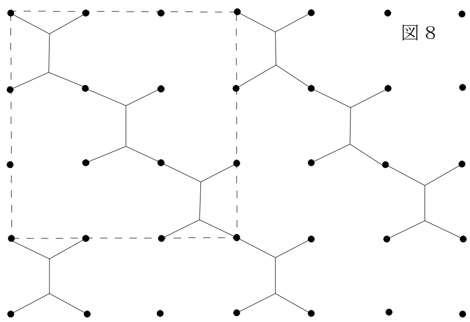
$$AD^2 = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2+\sqrt{3}$$

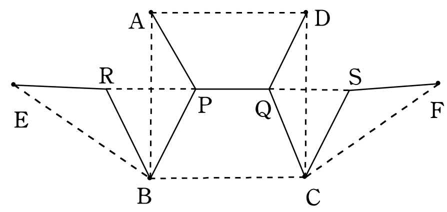
点線の長方形の面積２でこの中の線分の和はは AD に等しい

よって図７のパターンでは

$$L = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 0.96592\cdot\cdot$$

図８のパターンで点を結ぶ。面積１の正方形 ABCD の頂点を結ぶ線分の和は線分 EF の長さに等しい。





$$EF = \sqrt{3} + 1$$

図８における繰り返しの単位は点線の１辺３の正方形である。

この正方形の内部には点が９個、線分の和は 3EF であるから

$$L = = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{9} = \frac{\sqrt{3}+1}{3} = 0.91068\cdot\cdot$$

よって図８のパターンの結び方の方がＬは小さい。最小値は$\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}=0.91068$‥

【２】ｎ＝３のとき

点の配置は、合同な正三角形を限りなく並べて正三角形の頂点に点を配置したものになる。
点を結ぶ線分のパターンは図９または図１０のようになる。

（１）図９のパターン

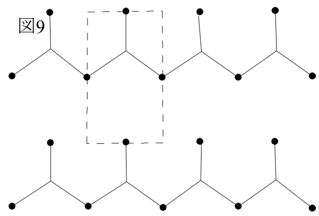


図9

正三角形の１辺を a、１つのセルを点線の長方形と考える。

１つのセルに点が２つ。１つのセルの面積は$\sqrt{3}\,a^2=2$、 $a=\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

１つのセルの線分の長さ l は$l=\sqrt{3}\,a$、１点当たりの線分の長さＬは

$$L=\frac{l}{2}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}=0.930604‥$$

（２）図１０のパターン

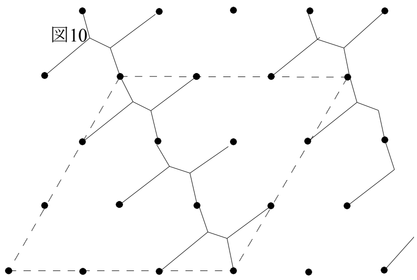
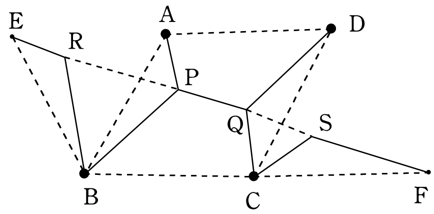


図10

点の分布は図９と同じ。１つのセルを点線の平行四辺形とする。
１つのセルの中の線分の長さを l とする。
菱形 ABCD で△ APB,△ DQC を 60°回転して△ ERB,△ FSC とする。線分の和 AP ＋ PB ＋ PQ ＋ QC ＋ QD ＝ EF



$$EF^2=(\frac{5}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2=7a^2$$

$$l=3EF=3\sqrt{7}\,a$$

$$L=\frac{l}{9}=\frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$\dfrac{a\sqrt{7}}{3} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$　であるから、図９のパターンが最小

よってｎ＝３のとき

$$L=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}=0.930604‥$$

【３】ｎ＝６のとき

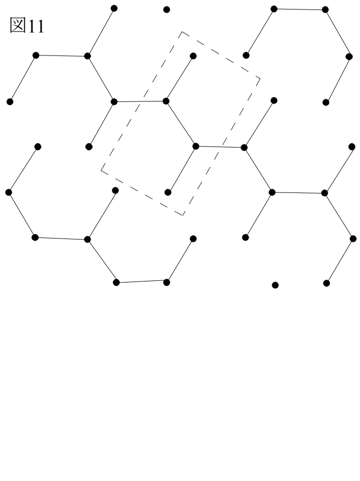


図11

正六角形の頂点に点を配置した図形で六角形の１辺を a とする。
１つのセルを点線の長方形にとる。１辺 $3a$,$\sqrt{3}\,a$ の長方形に頂点４個。

$3\sqrt{3}\,a^2=4$ より $a=\dfrac{2\sqrt{\sqrt{3}}}{3}$

１つのセルの線分は $4a$　、１点当たりの線分の長さＬは

$L=a=0.87738$‥

点が偏在するとき１点当たりの線分の長さＬは小さくなる。
と予想される。実際正三角形で頂点を抜いた正六角形は
正三角形よりＬは小さい。

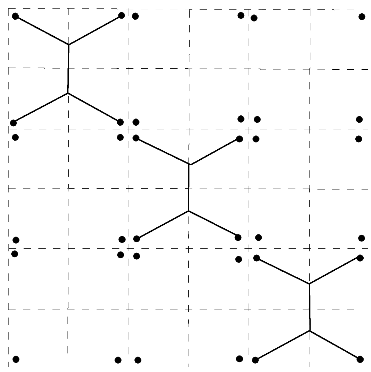
図１２で１つの点線の正方形の内部に点を図のように偏在させてとる。１辺を１とする。１セルを１辺６の正方形とし、そこに３６個の点を取る。線分の長さの和ｌは

$l=2\cdot 3(\sqrt{3}+1)+\mathrm{e}$　(e は近接した４個の点による増加量)　４つの点が正方形の頂点に限りなく近くなると

$$\mathrm{L}=\lim_{e\to 0}\frac{l}{36}=\frac{\sqrt{3}+1}{6}=0.455341\cdots$$

とかなり小さくなる。

図12



平面上に極めて多くの点を単位面積当たり１個となるように点をとる。その点を全て結ぶとき、１点当たりの線の長さＬは上限があることが予想される。つまり

予想

”ｎは十分に大きいとする。ｎ個の点が面積ｎの十分広い領域に分布するとき、すべての点を結ぶ線分の長さの和をＬとおくと

Ｌ＜ｋｎ　となる定数ｋが存在する。ｋは１より小さい正数である。

少なくとも　　Ｌ＜ｎ　が成り立つ。