正１２面体と２０面体の座標
正１２面体と正２０面体の辺を表すベクトルの一致
正１２面体の辺と辺のなす角
正１２面体の辺と面のなす角

正２０面体の座標表示

正 20 面体の各面は合同な正三角形で１つの頂点のまわりに５個の正三角形が配置している。

右図は正２０面体の一部で、点 A,B,W,Q,V は同一平面上にあり、５角形 ABWQV は正５角形である。（これは認めてください）

AD,BC はそれぞれ正５角形 APQDY,BXCQP の対角線であるから AD=BC

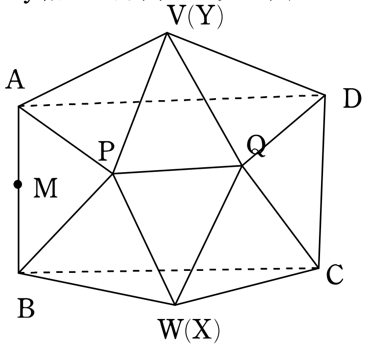
また AB=CD だから四角形 ABCD は平行四辺形

A と C、B と D は 20 面体で最も離れた頂点である。

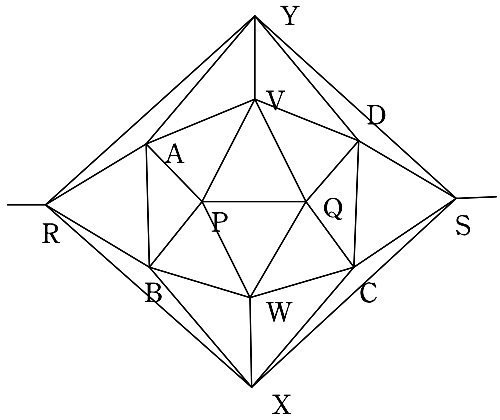
対称性から、∠ ABC ＝∠ BAD ＝ 90°

よって平行四辺形 ABCD は長方形、AC,BD は 20 面体の外接球の直径。

y軸正の方向から見た図



正５角形の１辺の長さを a，対角線の長さを c とおくと c は方程式



$c^2 - ac - a^2 = 0$ 　　・・・①

をみたし、１：e を黄金比として e は方程式

$e^2 - e - 1 = 0$

をみたす。　（①で $c = ae$）つまり

$$e=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad c=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

前と同じ議論で、四角形 PQRS,VWXY は長方形

AB の中点を M として AB ⊥ PM,AB ⊥ QM（AQ=BQ より）

（一番上の図）

よって△ MPQ ⊥ AB となるから AB ⊥ PQ。このような議論を繰り返して四角形 ABCD ⊥ PQRS

同様にして四角形 ABCD，PQRS，VWXY は互いに垂直。

各長方形の対角線は外接球の直径であり３つの長方形の対角線の中点は一致する。

これより、正２０面体の座標として②の１２個のようにとることができる。

正２０面体の座標

$$(\pm \frac{a}{2},\pm \frac{c}{2},0),(0,\pm \frac{a}{2},\pm \frac{c}{2}),(\pm \frac{c}{2},0,\pm \frac{a}{2}) \quad ・・・②$$

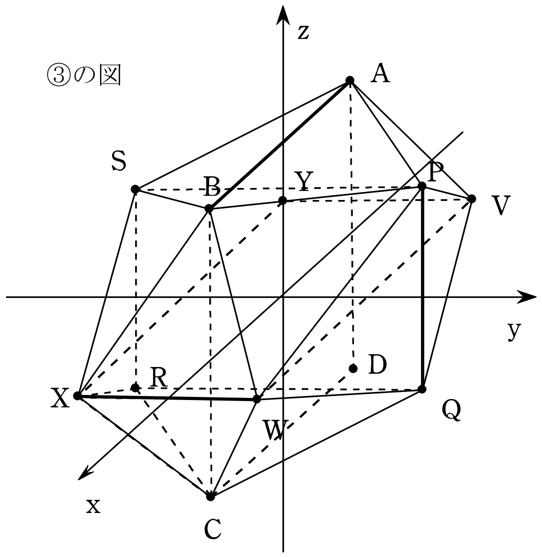
ただし、複号はすべての場合をとる。座標軸の取り方により、

$$(\pm \frac{c}{2},\ \pm \frac{a}{2},\ 0),\ (0,\ \pm \frac{c}{2},\ \pm \frac{a}{2}),\ (\pm \frac{a}{2},\ 0,\ \pm \frac{c}{2})$$

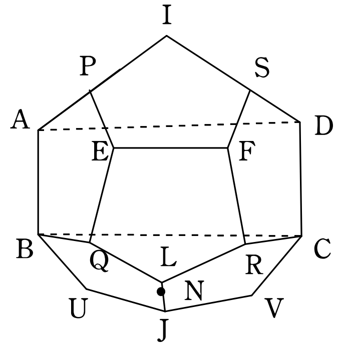
・・・③

ともかける。右図は③の場合で１２個の頂点の座標は③の形でも表せる。

③の図



正１２面体の座標表示



１辺の長さ a の正１２面体を考える。（右図）

四角形 ABCD について２辺 AB,CD は１２面体で最も離れた２辺であり、四角形 ABCD は長方形。同様に四角形 EFGH, IJKLL も長方形である。

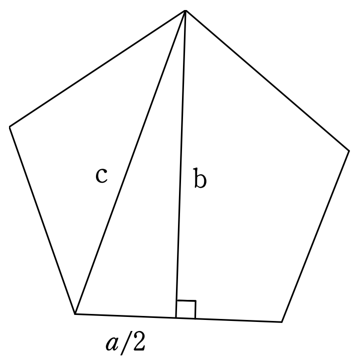
３つの長方形 ABCD,EFGH,IJKL を含む平面はは互いに垂直。

３つの長方形の対角線の中点は一致する。

PQ // AB，PS // AD で PQ ＝ PS，AB ⊥ AD だから四角形 PQRS は正方形。

同様に QUVR，PQUT，（PSWT）も正方形で、PQRS-TUVW は立方体である。

１辺 a の正５角形で頂点から対辺に下ろした垂線の長さを b, また、上の図の AD ＝ d　とおく



１２面体を長方形 ABCD を含む平面で切ると，

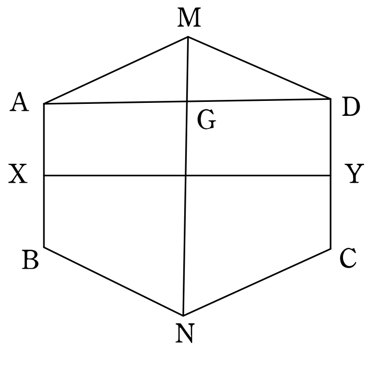
切り口は六角形 ABNCDM で、この六角形は直線 MN と XY について対称で

AM ＝ BN ＝ CN ＝ DM ＝ b

AD ＝ BC ＝ MN ＝ d

右図より

$$c^2=b^2+\frac{a^2}{4} \qquad ・・・④$$



△ AGM において三平方の定理と④から

$$\left(\frac{d}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=b^2=c^2-\frac{a^2}{4}$$

整理して d について解くと（$d>0$ として）

$$d=\frac{a+\sqrt{8c^2-3a^2}}{2}$$

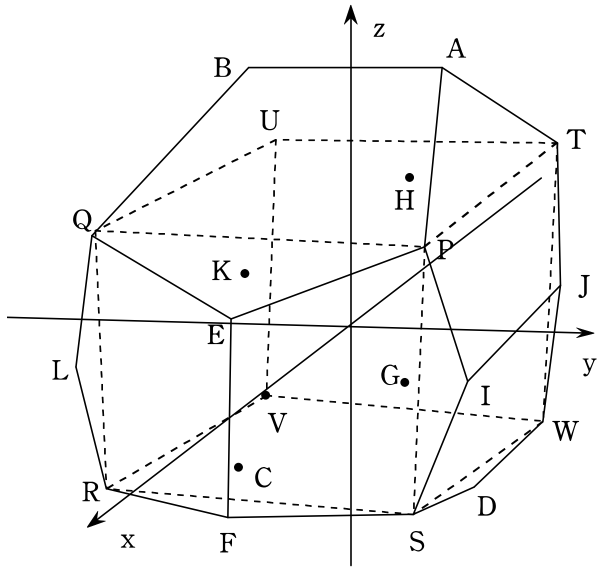
２ページ①の $c^2=ac+a^2$　を用いて

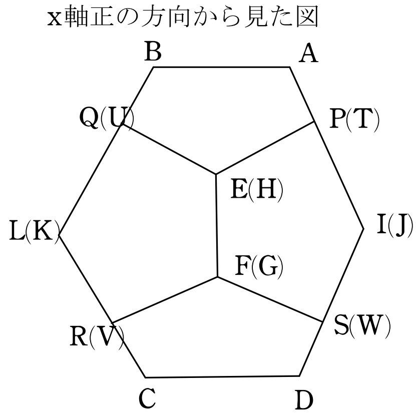
$$8c^2-3a^2=4c^2+4ac+a^2=(2c+a)^2$$

よって

$$d=a+c$$

以上のことから、正１２面体の頂点は、１辺 c の立方体の頂点と、a, d を２辺とする互いに垂直な長方形の頂点、合わせて 20 個である。よって正１２面体の頂点の座標は次ページの⑤のように表せる。





正１２面体の頂点の座標

$$\left(\pm\frac{a}{2},\ \pm\frac{d}{2},\ 0\right),\ \left(0,\ \pm\frac{a}{2},\ \pm\frac{d}{2}\right),\ \left(\pm\frac{d}{2},\ 0,\ \pm\frac{a}{2}\right),\ \left(\pm\frac{c}{2},\ \pm\frac{c}{2},\ \pm\frac{c}{2}\right)\ \cdot\cdot\cdot ⑤$$

多面体の面と面のなす角

正１２面体の面と面のなす角

正２０面体の各面の中心を頂点として正１２面体をつくることができる。同様に、正１２面体の各面の中心を頂点として正２０面体を作ることができる。（この性質を正１２面体と正２０面体は双対という）

このことから、

正１２面体の中心から頂点へ向かうベクトルは正２０面体の各面の法線ベクトル。
正２０面体の中心から頂点に向かうベクトルは正１２面の各面の法線ベクトル
としてとることができる。

したがって、原点から各頂点を結ぶベクトルのなす角を調べれば、各面のなす角が分かる。

２ページ②のベクトルのなす角を求めると、正１２面体の面のなす角が求まる。

②のベクトル間で内積を求めると、正であるものは $\frac{ac}{4}$ と $\frac{a^2+c^2}{4}$ だけである。

それぞれのベクトルは大きさは、$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{2}$ であるから、ベクトルのなす角を θ とすれば

$$\frac{ac}{a^2+c^2}=\frac{e}{e^2+1}=\frac{e}{e+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

より

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, 1である。 よって正１２面体の２面のなす角は ０° ともう１通り（約６３°）

正２０面体の面のなす角

４ページ⑤のベクトルのなす角を求めると、正２０面体の２面のなす角がわかる。

各ベクトルの大きさの平方は $\dfrac{3c^2}{4}$

⑤の初めの３つの括弧の式では同じ括弧内で内積正のものは $\dfrac{d^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{3c^2}{4}$ ，$\dfrac{d^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{c^2+2ac}{4}$

⑤のはじめの３つの括弧で異なる括弧の内積正のものは ad ／ 4 ＝ c^2／ 4

⑤の４番目の括弧内のベクトルで内積正のものは　$3c^2$／ 4，c^2／ 4

⑤のはじめ３つと４番目の内積正のものは　$\dfrac{1}{4}c(a+d)=\dfrac{1}{4}(c^2+2ac)$ ，$\dfrac{1}{4}c(d-a)=\dfrac{c^2}{4}$

$$\frac{c^2+2ac}{3c^2}=\frac{c+2a}{3c}=\frac{e+2}{3e}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$　などにより

なす角 θ は　$\cos\theta=1$ ，$\dfrac{1}{3}$ ，$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　より　θ ＝０°，約７１°，約４２°

の３つ

正多面体の辺を表すベクトルと、辺のなす角

辺を表すベクトル

正２０面体の辺を表すベクトルを求めてみる。以下簡単のため１辺を $2a$ とすると頂点の座標は２ページ③を用いて

$(\pm c,\pm a,0)\ (0,\pm c,\pm a),(\pm a,0,\pm c)$　・・・③′

$c^2 = ac + a^2,\ 0 < c - a < a < c$　・・・⑥

より２頂点を結ぶベクトルのうち、大きさが　$2a$ であるものは③′の同じ括弧の組では

$(\pm 2a,0,0),(0,\pm 2a,0),(0,0,\pm 2a)$

の６個。③′の異なる括弧の組では

$$c^2 + (c - a)^2 + a^2 = 2c^2 - 2ac + 2a^2 = 4a^2$$

つまり、$(c,a,0),(0,c,a)$ のような２頂点の距離は $2a$ となり隣接する頂点であることがわかる。

$$c^2 + (c + a)^2 + a^2 = 4c^2 > 4a^2$$

つまり、$(c,a,0),(0,-c,a)$ のような２頂点は隣接しない。

③′の異なる括弧の表す２頂点を結ぶ辺を表すベクトルは

$$(\pm c,\pm(c-a),\pm a),\ (\pm a,\pm c,\pm(c-a)),(\pm(c-a),\pm a,\pm c)$$

の２４個。正２０面体は辺が３０個あり、互いに平行な辺が対をなしているのでこれですべて。

正２０面体の辺を表すベクトルは

$\boldsymbol{(\pm 2a,0,0),\ (0,\pm 2a,0),\ (0,0,\pm 2a),\ (\pm c,\pm(c-a),\pm a),\ (\pm a,\pm c,\pm(c-a)),}$

$\boldsymbol{(\pm(c-a),\pm a,\pm c)}$　・・・⑦

の３０個

次に**正１２面体**の辺を表すベクトルを求める。１辺を $2a$ として④ページ⑤の頂点を２つのグループに分ける。

$(\pm c, \pm c, \pm c)$　　　　　　　　　　　・・・・Ａグループ
$(\pm a, \pm d, 0), (0, \pm a, \pm d), (\pm d, 0, \pm a)$　・・・・Ｂグループ

$2c > 2a$ により辺の両端がともにＡグループ頂点であるものはない
$d = a + c > 2a$　　であるから、Ｂグループで同じ括弧の２点を両端とする辺を表すベクトルは次の６個である。
$(\pm 2a, 0, 0), (0, \pm 2a, 0), (0, 0, \pm 2a)$

Ｂグループの異なる括弧の式で表される頂点を両端とするものはない。（必ず d か－ d が x,y,z 成分のどれかに残るのでベクトルの大きさは $2a$ より大きくなる）
片方がＡグループ、もう一端がＢグループであるものは
$(c - a)^2 + (d - c)^2 + c^2 = (c - a)^2 + a^2 + c^2 = 4a^2$
であるから次のベクトルの大きさは $2a$ である。
$(\pm(c - a), \pm(d - c), \pm c), (\pm c, \pm(c - a), \pm(d - c)), (\pm(d - c), \pm c, \pm(c - a))$ ・・・⑧
$d - c = a$ だから⑧は次の 24 個のベクトルで、大きさはすべて $2a$ となり、辺を表すベクトルである。
$(\pm(c - a), \pm a, \pm c), (\pm c, \pm(c - a), \pm a), (\pm a, \pm c, \pm(c - a))$

以上ですべて。よって、正１２面体の辺を表すベクトルは次の３０個

$\boldsymbol{(\pm 2a, 0, 0), (0, \pm 2a, 0), (0, 0, \pm 2a), (\pm c, \pm(c - a), \pm a), (\pm a, \pm c, \pm(c - a)),}$
$\boldsymbol{(\pm(c - a), \pm a, \pm c)}$　　・・・⑨
となり⑦，⑨はまったく同じ。
つまり正２０面体と正１２面体の辺を表すベクトルは一致する。
以上より、辺の長さが同じ**正１２面体と正２０面体は辺を表すベクトルが一致するようにできる。**
例えば正２０面体の２ページ③の図で $\mathrm{B}(a,0,c)$，$\mathrm{P}(0,c,a)$，４ページ左上図で $\mathrm{F}(d,0,-a)$, $\mathrm{S}(c,c,-c)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = (-a, c, a-c) = (c, c, -c) - (d, 0, -a) = \overrightarrow{\mathrm{FS}}$
つまり、正２０面体の辺 BP を表すベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と、正１２面体の辺 FS の表すベクトル $\overrightarrow{\mathrm{FS}}$ は一致する。

正１２面体、正２０面体の辺のなす角

次に辺と辺のなす角を考える。辺のなす角は $0°$ から $90°$ の範囲であるから辺を表すベクトルの内積で０以上のものを考える。
５ページ⑦または６ページ⑨の同じ括弧同士のベクトルでは ５ページ⑥から
$0 < c - a < a < c$　であったので、内積が正のものは
$c^2 + (c - a)^2 + a^2 = 4a^2$　　　　$c^2 + (c - a)^2 - a^2 = 2a^2$

$c^2 - (c-a)^2 + a^2 = 2ac = (\sqrt{5} + 1)a^2$　　$c^2 - (c-a)^2 - a^2 = 2ac - 2a^2 = (\sqrt{5} - 1)a^2$　・・・⑩

の４種類

異なる括弧のベクトルの内積０以上のものは

$ac + a(c - a) + c(c - a) = 2ac = (\sqrt{5}+1)a^2$　，　$ac - a(c - a) + c(c - a) = 2a^2$

$ac + a(c - a) - c(c - a) = 2ac - 2a^2 = (\sqrt{5}-1)a^2$　，　$-ac + a(c - a) + c(c - a) = 0$

・・・⑪

⑩，⑪より辺を表すベクトルの内積で０以上のものは

$4a^2$，$(\sqrt{5}+1)a^2$，$2a^2$，$(\sqrt{5}-1)a^2$　，0

である。

$cos36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，$cos72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$cos60° = \dfrac{1}{2}$

であるからベクトルのなす角は０°，３６°，６０°，７２°，９０°のいずれか。

以上から正１２面体と正２０面体は、すべての辺を表すベクトルを全く同じにとることができ、任意の２辺のなす角は

０°，３６°，６０°，７２°，９０°のいずれかである。