レバレッジ株とバブルインバース株の特徴その２

レバレッジ株とバブルインバース株の性質として次のことをあげる。

[1] 日経平均が２日間で同じ額変化するとき、２日とも同じ比率で変化する場合にレバレッジ株, ダブルインバース株ともに株価が最大になる。

例

(1)	日経平均	１００００円	→	１１０００円	→	１２１００円
	レバ	１００００円	→	１２０００円	→	１４４００円
	Dインバ	１００００円	→	８０００円		６４００円
(2)	日経平均	１００００円	→	１０５００円	→	１２１００円
	レバ	１００００円	→	１１０００円	→	１４３５２円
	Dインバ	１００００円	→	９０００円	→	６２５７円

例(1)は日経平均が毎日１０％ずつ上がっており、(2)より株価が高い。

[2] 日経平均が１度に変化するより２日に分けて変化する方がレバレッジ株，ダブルインバース株ともに株価が高い（２日とも上がるか、２日とも下がるとする）

例

日経平均	１００００円		→		１１０００円
レバ	１００００円		→		１２０００円
Dインバ	１００００円		→		８０００円

日経平均	１００００円	→	１０２００円	→	１１０００円
レバ	１００００円	→	１０４００円	→	１２０３１円
Dインバ	１００００円	→	９６００円	→	８０９４円

[3]　日経平均がある額変化するとき、毎日少しずつ変化した方が大きく変化する場合より株価が高い(毎日上がる　か、毎日下がるとする)

その極限は日経平均がもとのx倍になるとレバレッジ株はもとの x^2 倍，ダブルインバース株はもとの１／x^2 倍になる。また，k 倍レバレッジはもとの x^k 倍になる。実際はすべてこの値より小さくなる。

例

(1)　日経平均が５０００円の時レバレッジ株、ダブルインバース株、３倍レバレッジ株がすべて１００００円とすると、日経平均が１５０００円になると極限ではレバレッジ株は９００００円、ダブルインバース株は１１１１円、３倍レバレッジは２７００００円になる。さらに、日経平均が２００００円になるとレバレッジ株は１６００００円、ダブルインバース株は６２５円、３倍レバレッジ株は６４００００円になる。

(2) 日経平均が１８０００円のときレバレッジ、ダブルインバース、３倍レバレッジ株がすべて１００００円とする。日経平均が３０００円に暴落するとレバレッジ株は２７７円、ダブルインバース株は３６万円、３倍レバレッジ株は４６円になる。

(3) 初めに日経平均が８０００円レバ株、Ｄインバース株ともに１００００円とする。
日経平均が毎日　１０円ずつ上がって１６０００円になるとレバ株３９９７５円,Dインバース株２４９５円
日経平均が毎日１００円ずつ上がって１６０００円になるとレバ株３９７５３円,Dインバース株２４５２円
日経平均が毎日５００円ずつ上がって１６０００円になるとレバ株３８８２３円,Dインバース株２２５８円
となる

極限ではレバ株４００００円、Dインバース株２５００円です。

以下は上にあげたことの説明（証明）です。

【１】レバレッジ株

（１）日経平均が２日間で同じ額変化するとき、２日とも同じ比率で変化する場合にレバレッジ株, ダブルインバース株ともに株価が最大になる。

説明

日経平均が１日目 $1+r_1$ 倍、２日目 $1+r_2$ 倍として、２日とも $1+r$ 倍になる場合と比べる。
$1+r_1$, $1+r_2$, $1+r$ は正として、初日に対する２日後の倍率が一致するので

$(1+r_1)(1+r_2)=(1+r)^2$ ・・・①

このとき②が成り立つ

$r^2 \geqq r_1r_2$ ・・・②

［②の証明］

①を展開整理すると

$r_1+r_2+r_1r_2=2r+r^2$ ・・・・③

$1+r_1$, $1+r_2$, $1+r$ は正だから、相加相乗平均の関係と①より

$$\frac{(1+r_1)+(1+r_2)}{2} \geqq \sqrt{(1+r_1)(1+r_2)}=1+r$$

よって　$r_1+r_2 \geqq 2r$　つまり　$r_1+r_2-2r \geqq 0$・・・④

③，④より

$r^2-r_1r_2=r_1+r_2-2r \geqq 0$

よって②が成り立つ。(②の証明終わり)

レバレッジ株の初日に対する２日後の倍率は

$(1+2r)^2$, $(1+2r_1)(1+2r_2)$

であるのでこの大小を比べる。

$(1+2r)^2-(1+2r_1)(1+2r_2)$

$=4r+4r^2-2r_1-2r_2-4r_1r_2$

$=4r+4r^2-(4r+2r^2)-2r_1r_2$　　(③を用いて)

$=2(r^2-r_1r_2) \geqq 0$　　(②を用いて)

よって

$(1+2r)^2 \geqq (1+2r_1)(1+2r_2)$

以上で同じ比率で変化する場合のほうが大きくなることが示された。

（２）日経平均が１度に変化するより２日に分けて変化する方がレバレッジ株，ダブルインバース株ともに株価が高い（２日とも上がるか、２日とも下がるとする）

［証明］

日経平均が１日目 $1+r_1$ 倍、２日目 $1+r_2$ 倍と変化するとき（r_1,r_2 は同符号である）と、１度に $1+R$ 倍変化する場合を比べる。

２日後の日経平均が一致するので

$(1+r_1)(1+r_2)=1+R$

展開して

$r_1+r_2+r_1r_2=R$ ・・・⑤

レバレッジ株の２日後の初日に対する倍率は

$(1+2r_1)(1+2r_2)$ と $1+2R$ であるからこの大小を比べる。

$(1+2r_1)(1+2r_2)-(1+2R)$

$=2r_1+2r_2+4r_1r_2-2R$

$=2r_1r_2 > 0$　(⑤を用いる。また r_1,r_2 は同符号なので)

よって

$(1+2r_1)(1+2r_2) > 1+2R$

したがって１度に変化するより２回に分けた方がレバレッジ株の値が大きくなる。

（１）（２）より日経平均がある倍率に変化する場合、同じ倍率で日数を増やす方がレバレッジ株は高くなる。
日数を限りなく増やしたとき、次の結論が出る。

（３）日経平均が少しずつ同じ向きに変化してx倍になるとレバレッジ株は極限でx^2倍になる。

［証明］日経平均が毎日 $1+r$ 倍になり、n 日かかってもとの b 倍になったとする。（$b>0$，$b\neq 1$）

このとき n 日後の日経平均は

$(1+r)^n=b$　（倍）・・・⑥

レバレッジ株は

$(1+2r)^n$　倍・・・⑦

になる。

⑥より　$1+r=b^{\frac{1}{n}}$，$r=b^{\frac{1}{n}}-1$

⑦は

$$\begin{aligned}(1+2r)^n&=(1+2(b^{\frac{1}{n}}-1))^n\\&=(2b^{\frac{1}{n}}-1)^n\\&=(b^{\frac{1}{n}}(2-b^{-\frac{1}{n}}))^n\\&=b(1+(1-b^{-\frac{1}{n}}))^n\end{aligned}$$

n が十分大きいとき $1/n$ は０に十分近いので関数の展開

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdot\cdot\cdot$　を用いて

$f(x)=b^{-x}$ とおくと $f'(x)=-b^{-x}logb$だから

２次の項以下を無視して

$b^{-\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{n}logb$

これより

$$(1+2r)^n=b\left(1+\frac{logb}{n}\right)^n=b\left(\left(1+\frac{logb}{n}\right)^{\frac{n}{logb}}\right)^{logb}$$

よって

$\lim_{n\to\infty}(1+2r)^n=be^{logb}=b^2$　　※高校の数学Ⅲで習っているように $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$　ただし e は自然対数の底

（４）k倍レバレッジ株を考える。日経平均がx倍になるとk倍レバレッジ株は極限でx^k倍になる。

［証明］日経平均が毎日 $1+r$ 倍になり、n 日かかってもとの b 倍になったとする。

このとき n 日後の日経平均は

$(1+r)^n=b$　（倍）・・・⑥

k 倍レバレッジ株は

$(1+kr)^n$ 倍になる。(3) と同様に　$r=b^{\frac{1}{n}}-1$　だから

$$\begin{aligned}(1+kr)^n&=(1+k(b^{\frac{1}{n}}-1))^n\\&=(kb^{\frac{1}{n}}+1-k)^n\\&=(b^{\frac{1}{n}}(k-(k-1)b^{-\frac{1}{n}}))^n\\&=(b^{\frac{1}{n}}(1+(k-1)(1-b^{-\frac{1}{n}})))^n\\&=b(1+(k-1)(1-b^{-\frac{1}{n}}))^n\end{aligned}$$

(3) と同様に$b^{-\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{n}logb$を用いると

$$(1+kr)^n=b\left(1+(k-1)\frac{logb}{n}\right)^n=b\left(\left(1+\frac{(k-1)logb}{n}\right)^{\frac{n}{(k-1)logb}}\right)^{(k-1)logb}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}(1+kr)^n=be^{(k-1)logb}=b\cdot b^{k-1}=b^k$$

【２】ダブルインバース株

（１） ２回変化するとき同じ比率で変化するとき最大になる。

レバレッジ株のときと同じようにすると、ダブルインバースのときは

$(1-2r)^2$ と $(1-2r_1)(1-2r_2)$ の大小を比較すればよい。

$$(1-2r)^2-(1-2r_1)(1-2r_2)$$
$$=-4r+4r^2+2r_1+2r_2-4r_1r_2$$
$$=-4r+4r^2-6r_1r_2+4r+2r^2 \quad (③より)$$
$$=6(r^2-r_1r_2)\geqq 0 \quad (②より)$$

よって

$$(1-2r)^2\geqq(1-2r_1)(1-2r_2)$$

つまり同じ比率で変化する場合の方が大きい。

（２） １度に変化するより２回に分けた方が大きくなる。(2回とも増加するか、２回とも減少するとする)

$(1-2r_1)(1-2r_2)$ と $1-2R$ の大小を比較すればよい。

$$(1-2r_1)(1-2r_2)-(1-2R)$$
$$=-2r_1-2r_2+4r_1r_2+2R$$
$$=-2r_1-2r_2-2r_1r_2+6r_1r_2+2R \quad (⑤より)$$
$$=6r_1r_2>0$$

よって

$$(1-2r_1)(1-2r_2)>(1-2R)$$

となるので２回に分けて変化した方が大きい

（３） 日経平均が x 倍になるとダブルインバース株は $\frac{1}{x^2}$ 倍になる。（ｋ倍レバレッジのｋ＝－２の場合）

これもレバレッジのときと同様にして　$(1-2r)^n$ を計算する。　$(1+r)^n=b$　として　$r=b^{\frac{1}{n}}-1$ だから

$$(1-2r)^n=(1-2(b^{\frac{1}{n}}-1))^n$$
$$=(b^{\frac{1}{n}}(-2+3b^{-\frac{1}{n}}))^n$$
$$=b(1+3(-1+b^{-\frac{1}{n}}))^n$$
$$=b(1-\frac{3logb}{n})^n$$
$$=b((1-\frac{3logb}{n})^{\frac{n}{3logb}})^{3logb}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}(1-2r)^n=b\cdot\frac{1}{e^{3logb}}=\frac{1}{b^2}$$　　※ $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}$　　は高校でやった

よって示せた。