ＩＣＢＭの軌道計算（地球の自転も考慮）

ＩＣＢＭの軌道計算、地球の自転を考慮して。ただし、地球は球とする。また、空気抵抗はなく、発射の時には発射の瞬間に最高速度になるとする。

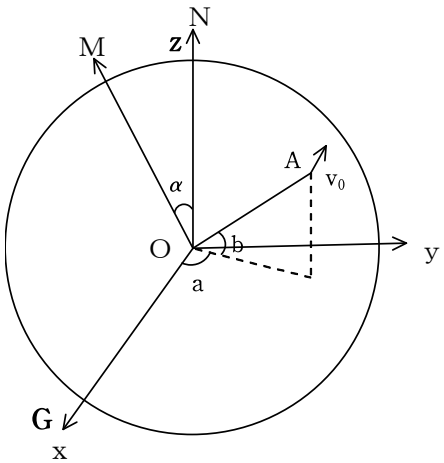
始めに

Ａ点から発射された物体は、地球中心とＡ点と初めの速度ベクトル（地球自転速度を含めて）を含む平面上を運動する。その平面は動かないので、始めにその平面と地球の交線である大円を求める。次にその平面上での物体の運動を求める。そのためには運動方程式を逐次的に解いていけばよい。ただし、大円内での回転角から東経を求めようとすると逆三角関数が出てきて時間ｔが大きくなるとうまくいかない。そこで⊿ｔに対応する東経の増分を求めて直接任意のｔに対する東経を求める。

では、詳細な議論を始める。

いま、ＩＣＢＭ（単に物体といいいましょう）がＡ地点から発射される。地球の中心をＯとする。物体にはＯを中心とする中心力しか働かないので、物体は初めの速度ベクトル$\overrightarrow{v_0}$とＯを含む平面上を運動する。ＯＭはこの平面の法線とする。Ａ地点の東経 a、北緯 b とする。ＯＮを地球の自転軸、ＯＧは赤道面の東経０度、ＯＮとＯＭのなす角をα、ＯＧをｘ軸ＯＮをｚ軸として直交座標を考える。

地球の半径をr_0、地球の自転の角速度ω_0、物体の地上に対する初速を東向きp_0、北向きq_0とすると自転を考慮して東向きの初速は$p_0+r_0\omega_0\cos b$、北向き初速はq_0。これらをｐ、ｑとおく。



$p=p_0+r_0\omega_0\cos b$、$q=q_0$

物体の東向き速度を$\overrightarrow{v_p}$、北向き速度を$\overrightarrow{v_q}$　これをｘ,ｙ,ｚ成分で表す。

$\overrightarrow{v_p}=(-p\sin a\ ,\ p\cos a\ ,\ 0\ )$、

$\overrightarrow{v_q}=(-q\cos a\sin b\ ,\ -q\sin a\sin b\ ,\ q\cos b\ )$

よって

$\overrightarrow{v_0}=(-p\sin a-q\cos a\sin b, p\cos a-q\sin a\sin b, q\cos b\ )$

これを$\overrightarrow{v_0}=(v_x,v_y,v_z)$とおく。

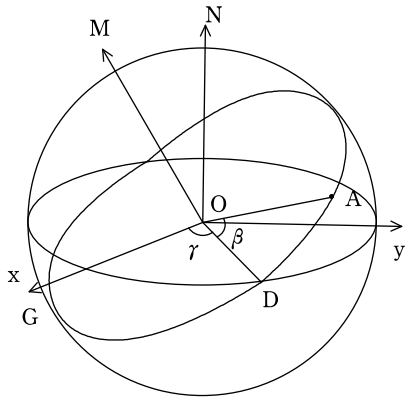
$\overrightarrow{OA}=(r_0\cos a\cos b, r_0\sin a\cos b, r_0\sin b)$を$\overrightarrow{OA}=(a_x,a_y,a_z)$とおく。

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{v_0}=(a_yv_z-a_zv_y\ ,\ a_zv_x-a_xv_z\ ,\ a_xv_y-a_yv_x)$を$(m_x,m_y,m_z)$とおく。

このベクトルと$\overrightarrow{OM}$と同じ方向だから$\cos\alpha=\dfrac{m_z}{\sqrt{m_x^2+m_y^2+m_z^2}}=s$

として

$\alpha=\cos^{-1}s$　・・・①



点Ａを含む大円と赤道面の交線をＯＤとする。点Ｄの東経をγ、∠ AOD＝β とおく

このとき、ON ⊥ OD、OM ⊥ OD

$\overrightarrow{m}=(m_x\ ,\ m_y\ ,\ m_z\ )$　とおくと$\overrightarrow{m}\ /\!/\ \overrightarrow{OM}$

また$\overrightarrow{e_z}=(0,0,1)$とおくと$\overrightarrow{e_z}\ /\!/\ \overrightarrow{ON}$

よって

$\overrightarrow{e_z}\times\overrightarrow{m}=\overrightarrow{OD}$　である。　$\overrightarrow{e_z}\times\overrightarrow{m}=(-m_y\ ,m_x\ ,0\ )$だから

$\cos\gamma=\dfrac{-m_y}{\sqrt{m_x^2+m_y^2}}$　より　$\gamma=\cos^{-1}\left(\dfrac{-m_y}{\sqrt{m_x^2+m_y^2}}\right)$・・・②

次にＯＡを含む大円をＯＮの周りにγ回転してＤがＧと一致するようにする。このとき点Ａは点Ａ′に移ったとする。点Ａ′の東経は $a-\gamma$ だからその座標は

Ａ′（$r_0\cos(a-\gamma)\cos b$, $r_0\sin(a-\gamma)\cos b$, $r_0\sin b$）

Ａ′をＯＤ′のまわりに－α回転して赤道面上に移し移った点をＡ″とおく。$A'(a'_x, a'_y, a'_z)$ とおいて

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_y \\ a'_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'_y\cos\alpha+a'_z\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし $-a'_y\sin\alpha+a'_z\cos\alpha=0$　（Ａ′は赤道上なので）

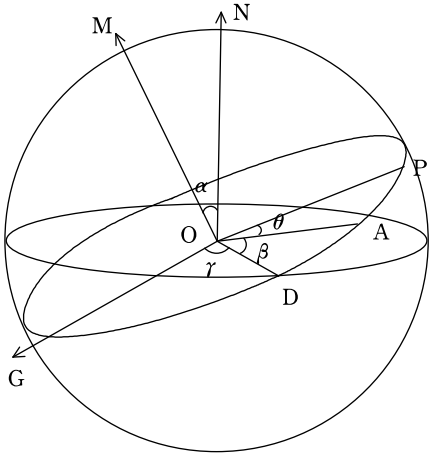
Ａ″（a_x'，$a_y'\cos\alpha+a_z'\sin\alpha$，0）

$$\cos\beta=\frac{a'_x}{r_0}=\cos(a-\gamma)\cos b$$

$$\beta=\cos^{-1}(\cos(a-\gamma)\cos b) \qquad ・・・③$$

①,②,③でα，β，γが求まった。

さて、物体（ＩＣＢＭ）は発射されてから O,D,A で決まる平面内を運動する。



発射後ｔ秒で物体と点 O を結ぶ直線と大円の交点を点Ｐ、物体のＯＭのまわりの回転角をθ、O と物体の距離を r、地表での重力加速度を g、物体の鉛直方向の速度を rv_r　とおく。

$v_r=\dfrac{dr}{dt}$ で運動方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2}=r\omega^2-\dfrac{k}{r^2} & (k\text{は定数}) \\ r^2\omega \text{ は一定} \end{cases}$$

と表される。ｔ＋⊿ｔ秒後の物体と O の距離を ｒ′、鉛直方向の速度を v_r'、角速度をω′、回転角をθ′とおくと

$$v_r'=v_r+\left(r\omega^2-\frac{k}{r^2}\right)\Delta t$$

$$r'=r+\Delta t\cdot v_r \qquad ・・・④$$

$r^2\omega=r_0^2\omega_0$　より　$\omega=\dfrac{r_0^2\omega_0}{r^2}$

$$\theta'=\theta+\omega\Delta t \qquad ・・・⑤$$

また、引力の項は

$\dfrac{k}{r_0^2}=g$　だから $k=r_0^2 g$

よって

$$v_r'=v_r+\left(r\omega^2-\frac{r_0^2 g}{r^2}\right)\Delta t \qquad ・・・⑥$$

これで静止座標系での物体の運動が求まった。次に発射ｔ秒後の物体の東経と北緯を求める。

時刻ｔ　での物体の東経ａ′、北緯ｂ′、

時刻ｔ＋⊿ｔでの物体の東経ａ′＋⊿ａ、北緯ｂ′＋⊿ｂ　とする。

大円をＯＧの周りに－α回転して赤道面に移動する。物体の水平方向の速度ベクトル$\vec{v}$は OG，ON を x 軸，z 軸として

$$\vec{v}=(-r_0\omega\, sin(\beta+\theta),\ r_0\omega\, cos(\beta+\theta),0)$$

物体が t から $t+\triangle t$ の間に$\overrightarrow{\triangle p'}$ 移動したとする。

$$\overrightarrow{\triangle p'}=r\omega\triangle t(-sin(\beta+\theta),cos(\beta+\theta),0)$$

$\overrightarrow{\triangle p'}$を OD の周りにα回転すると　$\overrightarrow{\triangle p}$　となる。

$$\overrightarrow{\triangle p}=r\omega\triangle t(-\sin(\beta+\theta),\cos(\beta+\theta)\cos\alpha,\cos(\beta+\theta)\sin\alpha)$$

同じように

$$\overrightarrow{OP}=r_0(\cos(\beta+\theta),\sin(\beta+\theta)\cos\alpha,\ \sin(\beta+\theta)\sin\alpha)$$

Ｐの赤道面への正射影をＰ″、ベクトル $\overrightarrow{\triangle p}$ の赤道面への正射影を$\overrightarrow{\triangle p''}$　とすると

$$P''=r_0(\cos(\beta+\theta),\ \sin(\beta+\theta)\cos\alpha,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\triangle p''}=r_0\omega\triangle t(-\sin(\beta+\theta),\cos(\beta+\theta)\cos\alpha\ ,0)$$

$\overrightarrow{OP''}+\overrightarrow{\triangle p''}=\overrightarrow{OQ}$として △ OP″ Q の面積△Ｓは、

$$\triangle S=\frac{1}{2}OP''^{2}\triangle a=\frac{1}{2}r_0^2\triangle a(\cos^2(\beta+\theta)+\sin^2(\beta+\theta)\cos^2\alpha)$$

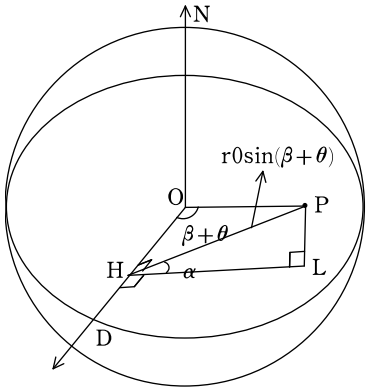
また、

$$\triangle S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{\triangle P''}|=\frac{1}{2}r_0^2\omega\triangle t\cos\alpha$$

$$\triangle a=\frac{\omega\triangle t\cos\alpha}{\cos^2(\beta+\theta)+\sin^2(\beta+\theta)\cos^2\alpha}$$

地球の自転があるので a' の増分は　$\triangle a-\omega_{00}\triangle t$　　・・・⑦

次に緯度であるが点Ｐから赤道面に下ろした垂線の足をＬ、点Ｐから直線ＯＤに下ろした垂線の足Ｈとすると



$PH=r_0\sin(\beta+\theta)$

より

$PL=r_0\sin(\beta+\theta)\sin\alpha$

また、

$PL=r_0\sin b'$

$b'=\sin^{-1}((\sin(\beta+\theta)\sin\alpha)$　　・・・⑧

点Ｐの　　東向き速度は　$\dfrac{r_0\triangle a\cos b'}{\triangle t}$　　・・・⑨

北向き速度は　$\dfrac{r_0\triangle b}{\triangle t}$　　・・・⑩

①から⑩をもちいてエクセルで計算を実行する。

追記２ページ中頃の運動方程式を解くとき$\dfrac{dr}{dt}$を両辺にかけて t で積分すると$\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2$が求まるが $\dfrac{dr}{dt}$の符号が定まらないので扱いにくい。